Politechnika Wrocławska

Podstawy Metrologii i Technik Eksperymentu

Laboratorium

BŁĘDY PRZYPADKOWE I SYSTEMATYCZNE

Instrukcja do ćwiczenia nr 1

Zespół Miernictwa
Wrocław, luty 2024 r.

BŁĘDY PRZYPADKOWE I SYSTEMATYCZNE

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie:

- błędów przypadkowych i ich rozkładów,
- błędów systematycznych oraz poprawki wskazania wraz z jej niepewnością.

2. Błędy pomiaru [1,2,3]

Błąd pomiaru $\Delta \boldsymbol{X}$ zgodnie z definicją to różnica między wynikiem surowym $\boldsymbol{X_s}$ (otrzymanym bezpośrednio z wyniku pomiaru, bez uwzględnienia poprawki), a wartością prawdziwą wielkości mierzonej $\boldsymbol{X_p}$ Przedstawia to poniższe równanie (1):

$$\Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_s} - \boldsymbol{X_p} \tag{1}$$

Błąd pomiaru jest sumą dwóch składowych błędów:

- błędu systematycznego $\Delta_s \cdot \boldsymbol{X}$
- błędu przypadkowego $\Delta_p \cdot \boldsymbol{X}$

Można zatem napisać:

$$\Delta \boldsymbol{X} = (\Delta_s \cdot \boldsymbol{X}) + (\Delta_p \cdot \boldsymbol{X}) \tag{2}$$

2.1. Błąd systematyczny. [1,2,3]

Zgodnie z definicją błąd systematyczny to różnica między średnią z nieskończonej liczby wyników pomiarów wielkości mierzonej a jej wartością prawdziwą. Wyraża to równie:

$$(\Delta_s \cdot \boldsymbol{X}) = \bar{X} - \boldsymbol{X_p} \tag{3}$$

Równanie to pokazuje, że wartość błędu systematycznego nie może być zanana gdyż nie wykonuje się nieskończenie wiele pomiarów, a także nie znamy wartości prawdziwej wielkości mierzonej. Wartość tego błędu można uwzględnić w wyniku pomiaru przyjmując na podstawie ograniczonej liczby pomiarów w warunkach powtarzalności, a za wartość prawdziwą przyjmując wartość wzorcową o niewielkiej niepewności. Wynik pomiaru po uwzględnieniu błędu systematycznego nazywa się wynikiem poprawionym. Poprawka to wartość błędu systematycznego ze znakiem przeciwnym. Zgodnie z definicją poprawka to wartość dodana do surowego wyniku pomiaru celem skompensowania błędu systematycznego. Można zatem napisać:

$$P = -(\Delta_s \cdot \boldsymbol{X}) \tag{4}$$

Ponieważ błąd systematyczny nie może zostać wyznaczony dokładnie to poprawka też nie jest stuprocentowa i charakteryzuje się niepewnością $u(P)$. Można zatem napisać:

$$P = \bar{P} \pm u(P) \tag{5}$$

2.2 Błąd przypadkowy. [1,2,3]

Zgodnie z definicją błąd przypadkowy $\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{X}$ to różnica między wynikiem pojedynczego pomiaru $\boldsymbol{X_i}$ a średnią z nieskończonej liczby wyników pomiarów wykonywanych w warunkach powtarzalności $\bar{X}$. Zatem:

$$\left(\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{X_i} - \bar{X} \tag{6}$$

Zgodnie z tą definicją błąd przypadkowy nie może zostać całkowicie oszacowany gdyż nie wykona się nieskończenie wiele pomiarów. Ponadto jego wartość zmienia się losowo i nie da się przewidzieć, tak jak w przypadku błędów systematycznych, jaka będzie jego wartość w kolejnym pomiarze. Dla przykładu niech wartość średnia z nieskończonej liczby pomiarów wynosi $\bar{X} = 20$, a wartości pojedynczych pomiarów: $X_1 = 21$, $X_2 = 18$, $X_3 = 22$, $X_4 = 20$, $X_5 = 19$. Błędy przypadkowe wynoszą zatem:

$$\left(\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot X_1\right) = 1; \left(\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot X_2\right) = -2; \left(\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot X_3\right) = 2; \left(\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot X_4\right) = 0; \left(\Delta_{\boldsymbol{p}} \cdot X_5\right) = -1.$$

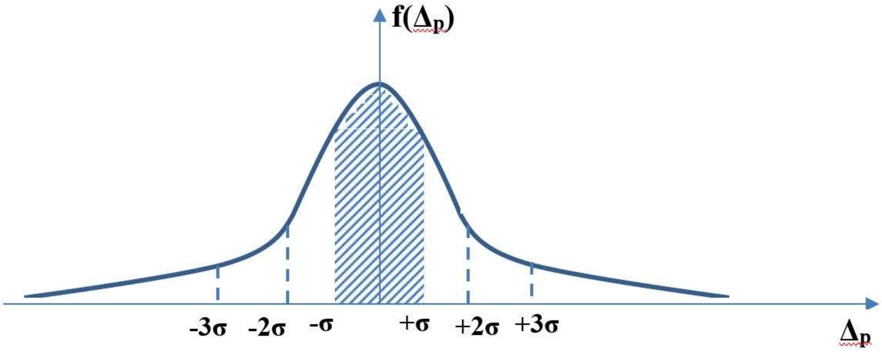
Ponieważ błędy przypadkowe zmieniają się losowo, charakteryzują się rozrzutem to najczęściej przyjmuje się że ich rozkładem jest rozkład normalny o wartości oczekiwanej (średniej) równej 0 i odchyleniu standardowym σ. Równanie opisujące rozkład błędów przypadkowych przedstawia się następująco:

$$f\left(\Delta_{\boldsymbol{p}}\right) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\Delta_{\boldsymbol{p}}{}^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)} \tag{7}$$

Przy wykonaniu serii pomiarów $X_1 \ldots X_N$ odchylenie standardowe błędów przypadkowych jest takie samo jak odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru σ i wynosi:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N-1}} \tag{8}$$

Krzywa rozkładu błędów przypadkowych przedstawiona jest na rysunku 1.



Rysunek 1 Rozkład błędów przypadkowych

Krzywa rozkładu błędów przypadkowych jest symetryczna względem zera co oznacza to, że błędy przypadkowe o przeciwnych znakach i takiej samej wartości spotykane są tak sam o często, a także, że prawdopodobieństw o wystąpienia błędów przypadkowych o wartościach mniejszych jest większe niż o wartościach większych.
Znając równanie funkcji Gaussa dla błędów przypadkowych, można obliczyć prawdopodobieństwo ich występowania w danym przedziale.
W tabeli 1 zamieszczono wybrane przedziały błędów przypadkowych wraz z prawdopodobieństwem ich występowania.

Tabela 1 Prawdopodobieństw o występowanie błędów przypadkowych dla wybranych przedziałów.

Przedział	Prawdopodobieństwo
$-\sigma \leq \Delta_p \leq +\sigma$	68,3%
$-2\sigma \leq \Delta_p \leq +2\sigma$	95,4%
$-2\sigma \leq \Delta_p \leq +3\sigma$	99,7%

Przekształcając równania od 1 d o 4 otrzymamy:

$$\boldsymbol{\Delta X_s + \Delta X_p = X_s - X_p} \tag{9}$$

i dalej:

$$\Delta X_p + X_p = X_s - \Delta X_s \tag{10}$$

Zakładając dalej, że poprawka P jest stuprocentowa otrzymamy:

$$\Delta X_p + X_p = X_{pop} \tag{11}$$

gdzie X_{pop} – wynik poprawiony.

Wynika z niego, że zmienność wyników poprawionych (jeżeli poprawka wynosi zero to surowych) zależy od rozkładu błędów przypadkowych. Oznacza to, że skoro błędy przypadkowe podlegają rozkładowi normalnemu to wyniki poprawione będą również podlegać rozkładowi normalnemu o takim samym odchyleniu standardowym i wokół wartości średniej. Oznacza to dalej, że wyniki poprawione będą oscylować wokół wartości prawdziwej wielkości mierzonej. Oznaczając wyniki poszczególnych pomiarów jako X_i rozkład normalny przedstawia funkcja:

$$f(X_i) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2} \tag{12}$$

Zgodnie z tym równaniem, w tabeli 2 przedstawiono prawdopodobieństwa znalezienia się wyniku pomiaru w przedziałach ±1σ, ±2σ, ±3σ.

Tabela 2 Prawdopodobieństw o występowanie wyników pomiarów, w wybranych przedziałach wokół wartości średniej

Przedział	Prawdopodobieństwo
$-\sigma \leq X_i - \bar{X} \leq +\sigma$	68,3%
$-2\sigma \leq X_i - \bar{X} \leq +2\sigma$	95,4%
$-3\sigma \leq X_i - \bar{X} \leq +3\sigma$	99,7%

Analizując poszczególne wartości prawdopodobieństwa z tabeli 2, zakładając dalej, ze przy dużej liczbie pomiarów wartość średnia najlepiej przybliża wartość prawdziwą można, dla przykładu dla przedziału jednego odchylenia standardowego można napisać:

$$X_p = X_i \pm \sigma; \alpha = 0{,}683 \tag{13}$$

Oznacza to, że odchylenie standardowe jest niepewnością pomiaru.

W przypadku rozpatrywania średnich z wyników pomiarów można zapisać:

$$X_p = \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \alpha = 0{,}683 \tag{14}$$

3. Wyznaczanie niepewności poprawki [3]

Zgodnie z definicją i według równania poprawkę można przedstawić jako:

$$P = X_p - \bar{X} \tag{15}$$

Stąd niepewność standardowa poprawki:

$$u(P) = \sqrt{u^2\left(X_p\right) + u^2(\bar{X})} \tag{16}$$

Jako wartość prawdziwą przyjmuje się zazwyczaj wartość wzorcową o niepewności $u\left(X_p\right)$, zaś niepewność średniej wielkości mierzonej liczy się jako niepewność łączną:

$$u(\bar{X}) = \sqrt{{u_A}^2(\bar{X}) + {u_B}^2(\bar{X})} \tag{17}$$

Niepewność standardowa typu A:

$$u_A(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{N\cdot(N-1)}} \tag{18}$$

Niepewność standardowa typu B:

$$u_B(\bar{X}) = \frac{\Delta_g(X)}{\sqrt{3}} \tag{19}$$

4. Stanowiska pomiarowe i sposób realizacji ćwiczenia

4.1. Błędy przypadkowe

1. Zmierzyć za pomocą stopera 30 razy czas wyłączenia świecącej lampy za pomocą, stopera,
2. Policzyć błędy przypadkowe,
3. Narysować wykres słupkowy błędów przypadkowych,
4. Obliczyć odchylenie standardowe błędów przypadkowych,
5. Narysować funkcję Gaussa dla błędów przypadkowych i wyznaczyć ich przedziały występowania z określonym prawdopodobieństwem,
6. Zapisać wynik pomiaru z określonym prawdopodobieństwem wokół średniej przy założeniu istnienia tylko błędów przypadkowych.

4.2. Błędy systematyczne

1. Ustawić temperaturę na kalibratorze równą 50°C.
2. Sprawdzić czy ustawiona wartość współczynnika emisyjności ε w pirometrze wynosi 0,95
3. Za pomocą dalmierza (1), dla średnicy powierzchni promieniującej kalibratora (3), wyznaczyć maksymalną odległość pomiarową.
4. W tym obszarze zmierzyć 10 - krotnie temperaturę.
5. Obliczyć błąd systematyczny i poprawkę wskazania.
6. Narysować wykres mierzonych temperatur z zaznaczeniem temperatury zadanej i poprawki wskazania.
7. Obliczyć niepewność poprawki wskazania.
8. Zapisać wynik pomiaru z określonym prawdopodobieństwem wokół średniej z uwzględnieniem niepewności poprawki wskazania.

PRZYKŁADOWE PYTANIA SPRAWDZAJĄCE

4.2.1. Definicja błędu pomiaru.
4.2.2. Definicja błędu przypadkowego.
4.2.3. Definicja błędu systematycznego.
4.2.4. Pojęcie poprawki.
4.2.5. Interpretacja rozkładu normalnego.
4.2.6. Jak wyznaczyć niepewność poprawki?
4.2.7. Definicja odchylenia standardowego pojedynczeg o pomiaru i średniej.

9. LITERATURA

1. John.R. Taylor: *Wstęp d o analizy błędu pomiarowego*, PWN, Warszawa 1999

2. Danuta Turzeniecka: *Ocena niepewności wyniku pomiaru*, Wydawnictw o Politechniki Poznańskiej 1977

Jerzy Arendarski: *Niepewność pomiarów,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2006

Data wykonania instrukcji:
23.02.2024