



Politechnika Wroclawska

Katedra Techniki Ciepłej W9/K51

Miernictwo i systemy pomiarowe – Lab.

Wyznaczanie stałej czasowej czujnika termometrycznego

Instrukcja do ćwiczenia nr 6

Opracował: dr inż. Wiesław Wędrychowicz

Wrocław, 2023.

Wstęp teoretyczny

1. Wstęp

Charakterystyka skokowa czujnika termometrycznego jest zagadnieniem o dużym znaczeniu w układach automatycznej regulacji temperatury. Źródłem błędu pomiaru w warunkach nieustalonych jest bezwładność wskazań zastosowanego czujnika wynikająca z:

- jego pojemności cieplnej,
- intensywności wymiany ciepła między czujnikiem a otoczeniem.

Im większa pojemność cieplna i mniejsza intensywność wymiany ciepła tym większa różnica temperatur czujnika i ośrodka przy gwałtownej zmianie temperatury ośrodka.

Do rozważań przyjmujemy założenia:

- rozpatrywany jest idealny czujnik termometryczny o nieskończenie dużej przewodności cieplnej.
- wymiana ciepła zachodzi tylko między czujnikiem a płynem (czujnik jest całkowicie zanurzony w ośrodku),
- pojemność cieplna czujnika jest pomijalnie mała w porównaniu z pojemnością cieplną ośrodka badanego

Przepływ ciepła możemy opisać równaniami:

Ilość ciepła dQ wymienianego pomiędzy czujnikiem a ośrodkiem w czasie $d\tau$:

$$dQ = \alpha \cdot A \cdot (t - t_{cz})d\tau \quad [1]$$

gdzie:

α – współczynnik przejmowania ciepła pomiędzy czujnikiem a ośrodkiem,

A – pole powierzchni wymiany ciepła czujnika,

t – temperatura ośrodka,

t_{cz} – temperatura czujnika.

Ilość ciepła zakumulowaną w czujniku możemy opisać wzorem:

$$dQ = m \cdot c \cdot dt_{cz} \quad [2]$$

gdzie:

m – masa czujnika,

c – ciepło właściwe materiału czujnika,

dt_{cz} – różniczka temperatury czujnika przyporządkowana czasowi $d\tau$.

przekazywane ciepło w czasie $d\tau$ jest akumulowane w czujniku dlatego jego temperatura rośnie aż do osiągnięcia temperatury ośrodka. Jednocześnie maleje różnica temperatur czujnika i ośrodka przez co strumień ciepła jest coraz mniejszy. Możemy zatem zapisać równanie będące porównaniem względem przekazanego ciepła równań [1] i [2].

$$m \cdot c \cdot dt_{cz} = \alpha \cdot A \cdot (t - t_{cz}) \cdot d\tau \quad [3]$$



Przekształcamy dalej równanie aby otrzymać zależność elementarnej zmiany temperatury czujnika dt_{cz} po elementarnym czasie $d\tau$.

$$\frac{m \cdot c}{\alpha \cdot A} \cdot \frac{dt_{cz}}{d\tau} = t - t_{cz}$$

Dalej przekształcamy do postaci w której temperatura ośrodka jako temperatura wymuszenia t znajdowała z prawej strony równania.

$$\frac{m \cdot c}{\alpha \cdot A} \cdot \frac{dt_{cz}}{d\tau} + t_{cz} = t$$

W równaniu widzimy człon, który w procesie jest niezmienny i zależy od własności fizycznych samego czujnika. Ten człon zastąpimy symbolem τ_0 a z analizy wymiarowej otrzymujemy, że jego wymiarem jest czas. Podsumowując jest to stała, zależna od własności fizycznych czujnika oraz warunków wymiany ciepła z otoczeniem, mająca wymiar czasu dlatego nazwano ją **stałą czasową czujnika**.

$$\tau_0 = \frac{m \cdot c}{\alpha \cdot A} \quad [4]$$

Zatem możemy ostatecznie zapisać **równanie różniczkowe czujnika termometrycznego** w postaci:

$$\tau_0 \cdot \frac{dt_{cz}}{d\tau} + t_{cz} = t \quad [5]$$

2. Wymuszenie skokowe

Rozpatrując charakterystykę czujnika temperatury przyjmujemy założenie, że temperatura ośrodka jest stała, czyli $t = \text{const}$ w równaniu różniczkowym.

Rozwiązując równanie [5] względem temperatury czujnika t_{cz} otrzymujemy:

$$t_{cz} = t \left(1 - e^{\frac{-\tau}{\tau_0}} \right) \quad [6]$$

gdzie:

τ_0 - stała czasowa czujnika, s,

t - temperatura wymuszenia ($t = t_{\text{ośrodek}} - t_{\text{początkowe czujnika}}$), °C,

τ - czas od chwili wymuszenia, s.

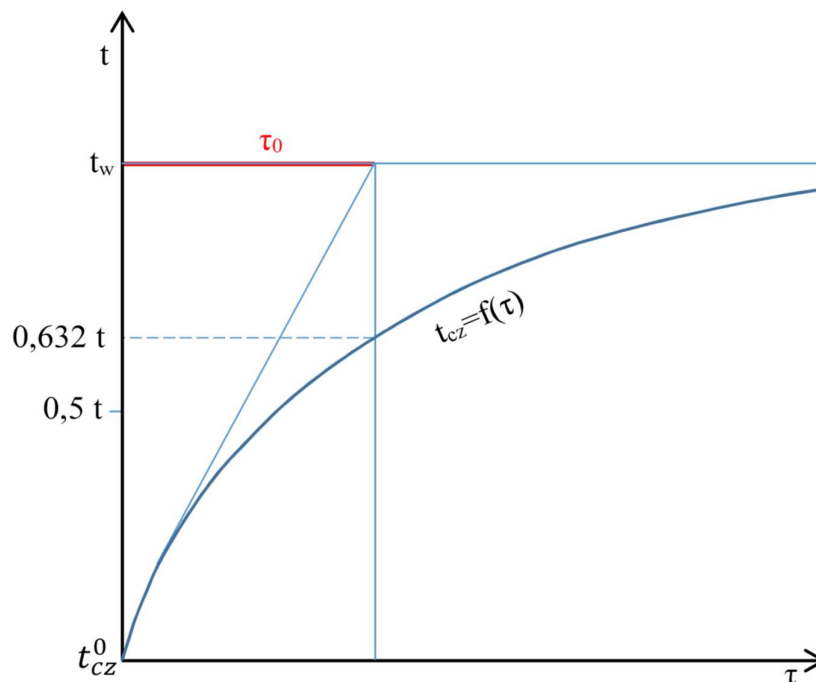
Postawmy pytanie: jaką temperaturę osiągnie czujnik po czasie równym stałej czasowej? Aby odpowiedzieć na to pytanie do równania [6] za τ wstawimy τ_0 . Rozwiązanie okazuje się banalnie proste, a odpowiedzią jest, że temperatura t_{cz} po czasie τ_0 wyniesie $t_{cz} = 0,632120558828$ temperatury wymuszenia, czyli zaokrąglając $t_{cz}(\tau_0) = 0,632 t$.

$$t_{cz}(\tau_0) = 0,632 \cdot t \quad [7]$$



Rozwiązanie to daje możliwość empirycznego wyznaczenia stałej czasowej czujnika bez dokładnej analizy jego własności fizycznych i termodynamicznych. Zagadnienie sprowadza się do pomiaru czasu po którym czujnika osiągnął 63,2% temperatury wymuszenia.

Graficzne przedstawienie odpowiedzi czujnika termometrycznego na wymuszenie skokowe przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Odpowiedź czujnika termometrycznego na wymuszenie skokowe

Na rysunku została pokazany sposób wyznaczenia stałej czasowej czujnika na podstawie pomiaru temperatury.

Zajmiemy się teraz wartością błędu wskazania temperatury po wymuszeniu skokowym.

Chcemy wyznaczyć błąd względny, czyli odchyłkę wskazania odniesioną do wartości prawidłowej (wymuszenia t). Przekształćmy zatem równanie [6]. Myślę, że kolejnych kroków nie trzeba komentować.

$$t_{cz} = t \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \right)$$

$$t_{cz} = t - t \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

$$t_{cz} - t = -t \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$



$$\frac{t_{cz} - t}{t} = -e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

Zatem wartość błędu względnego możemy wyliczyć:

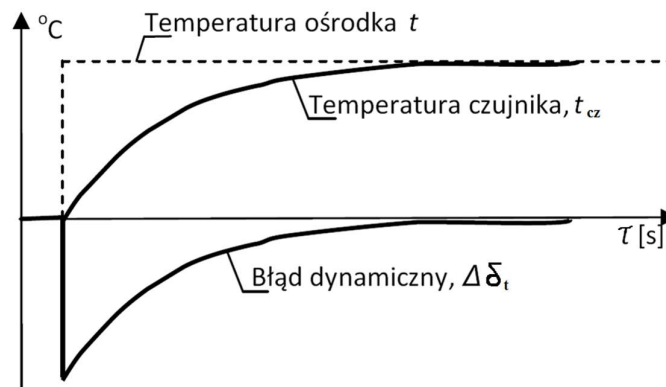
$$\delta_t = \frac{t_{cz} - t}{t} = -e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

Jeżeli będziemy wyrażali czas τ w krotnościach τ_0 możemy określić po jakim czasie błąd względny spadnie poniżej akceptowalnej wartości, która w pomiarach przemysłowych wynosi 2%.

τ/τ_0	δ_t	$ \delta_t $
1	-0,367879	36,8%
2	-0,1353353	13,53%
3	-0,0497870	4,98%
4	-0,0183356	1,83%
5	-0,00673794	0,67%

Powyższa tabelka ukazuje, że już po czasie $\tau = 4 \tau_0$ błąd pomiaru temperatury wynosi poniżej 2%.

Podsumowując: Błąd względny odczytu temperatury zależy od stałej czasowej czujnika i w czasie jest zbieżny do zera. Po czasie $\tau = 4 \tau_0$ błąd względny osiąga wartość $|\delta_t| = 1,8\%$, co oznacza w warunkach przemysłowych, że czujnik osiągnął temperaturę otoczenia, w której się znalazł. Wykres zmiany temperatury w czasie przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Zmiana temperatury i błęd dynamicznego czujnika w czasie.

Przy pomiarach szybkozmiennej temperatury należy więc stosować czujniki które cechuje w danym ośrodku mała stała czasowa (czujniki o małej pojemności cieplnej) oraz zapewnić dobrą wymianę ciepła.

3. Wymuszenie liniowe czujnika termometrycznego

W wielu przypadkach zachodzi potrzeba pomiaru temperatury ośrodka, którego temperatura monotonicznie rośnie lub maleje. Taką zmianę temperatury ośrodka możemy opisać funkcją liniową:



$$t = k \cdot \tau$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności.

Podstawiając otrzymaną funkcję liniową do podstawowego równania różniczkowego czujnika termometrycznego otrzymamy równanie:

$$\tau_0 \cdot \frac{dt_{cz}}{d\tau} + t_{cz} = k \cdot \tau$$

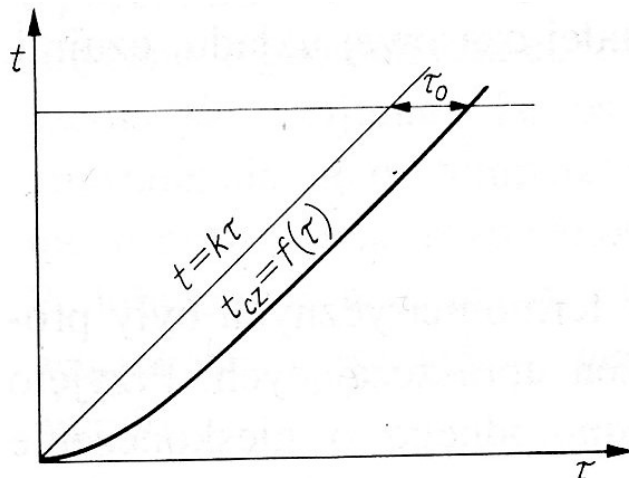
Rozwiązując równanie względem temperatury czujnika otrzymamy równanie na zmianę temperatury w czasie przy monotonicznej zmianie temperatury ośrodka

$$t_{cz} = k \left[\tau - \tau_0 \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \right) \right]$$

Jeżeli przyjmiemy, że czas τ dąży do nieskończoności otrzymamy równanie

$$t_{cz} = k(\tau - \tau_0)$$

z którego wynika, że temperatura czujnika „opóźnia się” w stosunku do temperatury ośrodka o czas równy stałej czasowej czujnika termometrycznego. Zmianę temperatury ośrodka i temperatury czujnika termometrycznego przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Wykres zmiany temperatury ośrodka i czujnika termometrycznego przy liniowej zmianie temperatury ośrodka.

Wartość błędu względnego przy wymuszeniu liniowym dla $\tau > 0$



$$\delta_t = \frac{t_{cz} - t}{t} = -\frac{\tau_0}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}\right)$$

Jeżeli jak poprzednio do określenia czasu posłużymy się krotnością stałej czasowej $\tau = n\tau_0$ możemy wyznaczyć błąd względny czujnika termometrycznego równaniem

$$\delta_t = -\frac{1}{n} (1 - e^{-n})$$

Podstawiając kolejne wartości n do równania możemy znaleźć czas po którym błąd będzie na akceptowalnym poziomie. W tabeli zestawiono wyniki obliczeń.

τ/τ_0	δ_t	$ \delta_t $
1	-0,63212	63,2%
2	-0,43233	43,2%
5	-0,19865	19,9%
10	-0,10000	10,0%
20	-0,05000	5,0%
30	-0,03333	3,3%
40	-0,02500	2,5%
50	-0,20000	2,0%
60	-0,01667	1,7%

Na podstawie przedstawionych w powyższej tabeli danych można stwierdzić, że odczyt temperatury z błędem 2%, w przypadku liniowej zmiany temperatury można dokonać dopiero po 50 krotnej wartości stałej czasowej czujnika termometrycznego.

4. Wymuszenie sinusoidalne czujnika termometrycznego

W przypadku ośrodków w których następują ciągłe zmiany temperatury, charakterystykę czujnika temperatury możemy wyznaczyć przy założeniu że temperatura ośrodka zmienia się sinusoidalnie. Równanie opisujące zmianę temperatury przedstawimy w postaci:

$$t = t_{max} \sin(\omega\tau)$$

gdzie

t_{max} – amplituda temperatury mierzonej

$\omega = 2\pi\nu$ – pulsacja, ν – częstotliwość,

Wstawiając założoną funkcję do podstawowego równania różniczkowego czujnika termometrycznego otrzymujemy równanie:

$$\tau_0 \cdot \frac{dt_{cz}}{d\tau} + t_{cz} = t_{max} \sin(\omega\tau + \varphi)$$

gdzie



φ – kąt przesunięcia fazowego między funkcjami opisującymi temperaturę mierzoną i temperaturę czujnika
 $\varphi = -\arctg(\omega\tau_0)$

Rozwiązując otrzymane równanie względem temperatury czujnika otrzymujemy równanie różniczkowe opisujące temperaturę czujnika:

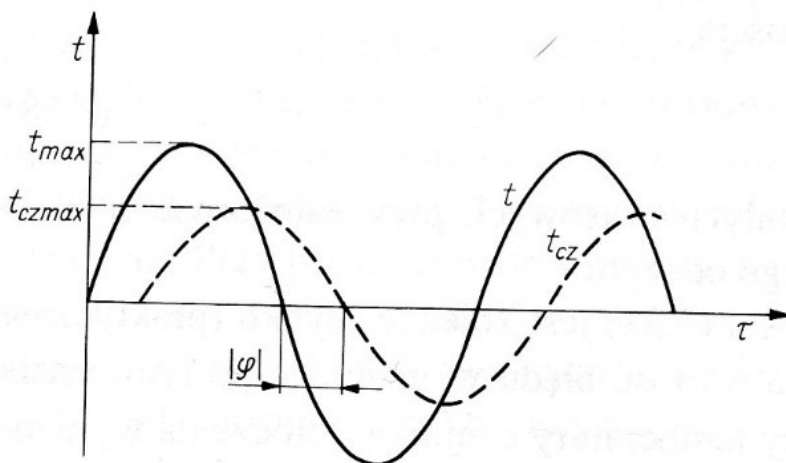
$$t_{cz} = t_{czmax} \sin(\omega\tau)$$

gdzie

t_{czmax} – amplituda wahań temperatury czujnika

$$t_{czmax} = t_{max} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}}$$

Można zauważyć, że amplituda temperatury czujnika i kąt przesunięcia fazowego zależą od stałej czasowej układu czujnik – otoczenie. Wykres przebiegu temperatur przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Przebieg temperatur ośrodka i czujnika w czasie przy wymuszeniu sinusoidalnym.

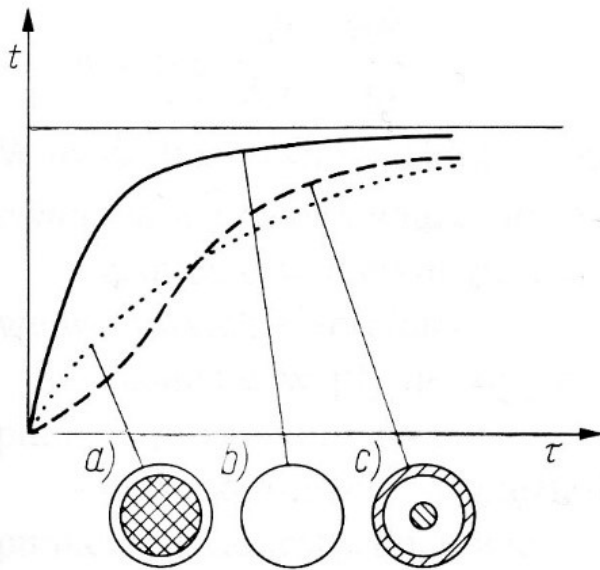
5. Rzeczywiste czujniki termometryczne

Rozpatrując rzeczywiste czujniki termometryczne musimy uwzględnić występujące w nich własności różniące je od przyjętych do rozważań czujników idealnych. Należą do nich:

- skończony współczynnik przewodności cieplnej - istnieje gradient temperatury który wywołuje dodatkowe opóźnienie zmiany temperatury czujnika względem ośrodka
- materiał nie jest jednorodny – różniące się własności cieplne czujników tego samego typu.

Przykładowe odpowiedzi czasowe rzeczywistych czujników termometrycznych na wymuszenie skokowe temperatury ośrodka przedstawiono na rys. 5.





- a) czujnik termometru rozszerzalnościowego cieczowego,
- b) czujnik powierzchniowy termometru rezystancyjnego
- c) czujnik termoelementu z osłoną cylindryczną

Rys. 5. Odpowiedzi czasowe rzeczywistych czujników termometrycznych na wymuszenie skokowe temperatury ośrodka

Podsumowując:

Na dynamikę czujnika termometrycznego mają generalnie wpływ własności fizyczne i geometryczne czujnika oraz warunki przejmowania ciepła od otoczenia do czujnika. Ze względu na niejednorodność materiałów i różnorodność konstrukcji czujniki do ważnych pomiarów zmiennej temperatury ośrodka powinny mieć wyznaczoną stałą czasową na drodze doświadczalnej.

6. Przebieg ćwiczenia

Wyznaczanie stałej czasowej czujnika termometrycznego przeprowadzone zostanie na stanowisku przedstawionym na rys.6

	<p>Opis stanowiska</p>
--	------------------------

Rys. 6. Stanowisko pomiarowe



7. Przebieg ćwiczenia

Pomiar stałej czasowej czujnika termometrycznego przeprowadza się z wykorzystaniem rejestratora ekranowego do którego podłączone są trzy czujniki temperatury. Wskazywana przez czujniki temperatura rejestrowana jest przez rejestrator ekranowy i jednocześnie wartości wyświetlane są na ekranie w formie wykresu.

Aby przeprowadzić pomiar należy wykonać następujące czynności:

1. Uruchomić termostat i sprawdzić czy nastawiona jest na 80° lub 90°. W czasie nagrzewania wody w termostacie komora termostatu powinna być przykryta.
2. Przygotować naczynie napełnione wodą z kostkami lodu.
3. Ustawić naczynie pod czujnikami i delikatnie opuścić czujniki do zanurzenia w wodzie z lodem. Intensywnie mieszać
4. Uruchomić rejestrator ekranowy, obserwować wskazywaną temperaturę, zidentyfikować czujniki i ich wskazywane wartości przez rejestrator. Zrobić notatki dotyczące zewnętrznych cech czujników (informacje będą potrzebne do opracowania wyników pomiarów)
5. Gdy temperatura w termostacie osiągnie zadaną wartość i jednocześnie temperatura czujników w wodzie z lodem nie zmienia się (stale mieszając wodę z lodem) można przystąpić do pomiaru.
6. Pomiar: Sprawnie unosimy czujniki wyciągając je z wody lodowej, usuwamy naczynie z wodą z lodem i przesłoną termostatu, opuszczamy czujniki do nagrzanej wody. Odnotowujemy przybliżoną godzinę i minutę rozpoczętego pomiaru.
7. Obserwujemy na ekranie zmianę temperatury. Jeżeli na wykresie obserwujemy, w chwili początkowej, łagodny wzrost temperatury czujników, lub jest on schodkowy oznacza to że czas realizacji punktu 6. był zbyt długi i pomiar będzie wymagał powtórzenia od punktu 3.
8. Pomiar trwa tak długo aż temperatura czujników osiągnie stan równowagi (nie zmienia się). Można to również stwierdzić po obserwacji wartości temperatury wyświetlanej na ekranie.
9. Jeżeli pomiar jest poprawny (punkt 7.) wyłączamy termostat i przekazujemy prowadzącemu kopię protokołu z informacją na której będzie podana grupa ćwiczeniowa, data, godzina i minuta rozpoczęcia poprawnego pomiaru, imiona i nazwiska biorących udział w pomiarach, adresy e-mail. Po zajęciach prowadzący prześle dane z rejestratora w postaci pliku .csv na pocztę email studentów biorących udział w ćwiczeniu.

8. Opracowanie wyników

Opracowanie wyników polega na:

- sporządzeniu charakterystyki zmiany temperatury czujnika w funkcji czasu dla każdego czujnika,
- wyznaczeniu stałej czasowej każdego czujnika,
- analizę porównawczą charakterystyk i stałych czasowych czujników uwzględniając wpływ budowy i materiałów

Zbiorcze podsumowanie obserwacji.

Uwaga!

Opracowując wyniki należy przyjąć, jako temperaturę początkową, stabilną temperaturę jaką wskazywał czujnik przed rozpoczęciem pomiaru, a temperaturę ośrodka (wymuszenia) temperaturę jaką osiągnął na końcu trwania pomiaru (po ustaleniu się temperatury). W ogólnym przypadku temperatury te mogą być różne dla poszczególnych czujników.



Ćwiczenie nr 6
Miernictwo i systemy pomiarowe

Protokół pomiarowy z dnia godzina grupa

Temperatura otoczenia:°C ,

Poprawny pomiar:

data

godzina rozpoczęcia minuta rozpoczęcia

Wykonawcy:

Imię	Nazwisko	e-mail

Cechy zewnętrzne czujnika (informacje potrzebne do analizy w p. 8.):

Czujnik 1
.....
.....

Czujnik 2
.....
.....

Czujnik 3
.....
.....

Uwagi:

